**УДК** 519.8.А

А.А. ПЕТУНИН , А.Г. ЧЕНЦОВ , П.А. ЧЕНЦОВ

# МАРШРУТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЗАДАЧАХ

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБХОДА МНОЖЕСТВ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ**

*А.А. Петунин, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов.* **Маршрутные процессы в задачах последова- тельного обхода множеств при наличии ограничений.**

**Аннотация.** Исследуется задача маршрутизации перемещений с ограничениями и функциями стоимости, зависящими от списка заданий. Рассматриваемая постановка ориентирована на инженерные приложения, связанные с листовой резкой деталей на машинах с ЧПУ; возможны и другие применения (в частности, полученные результаты могут использоваться в задаче минимизации дозовой нагрузки при демонтаже системы радиационно опасных элементов при авариях на АЭС). Объектами посещения являются непустые конечные множества — мегаполисы. Среди ограничений особо выделяются условия предшествования, которые удается использовать для снижения вычислительной сложности. В качестве основного метода исследования используется широко понимаемое динамическое программирование (ДП), учитывающее условия предшествования и зависимость функций стоимости от списка заданий. В процессе решения оптимизируются вариант очередности выполнения заданий, конкретная траектория процесса и точка старта. Алгоритм реализован в виде программы для ПЭВМ; решен модельный пример.

**Ключевые слова:** динамическое программирование, допустимое решение, маршрут, траектория

**Введение.** Объектом исследования в статье являются задачи марш- рутизации перемещений с ограничениями различных типов; среди послед- них особо выделяем условия предшествования и ограничения динамиче- ского характера, возникающие по мере развития процесса и проведения тех или иных работ. При должной формализации возникает постановка, идейно близкая к дискретным задачам управления большой размерности (имеется в виду дискретность и по времени и по фазовому состоянию). Оп- тимизируется комплекс, включающий точку старта, вариант очередности исполнения заданий (далее – маршрут) и конкретную траекторию; сам воз- никающий при этом комплекс (триплет) именуем маршрутным процессом. Возможные применения могут быть, в частности, связаны с атомной энер- гетикой (см. [[1](#_bookmark39)—[3](#_bookmark40)]; задача минимизации дозовой нагрузки работников при демонтаже радиационно опасных объектов) и машиностроением (см. [[4](#_bookmark41)—[6](#_bookmark42)]; задача управления инструментом при фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ); имеются и другие приложения. В настоящей статье ориентируемся на применение разрабатываемых методов в машиностро- ении; следуем при этом монографии [[4](#_bookmark41)]. Здесь первоначальная задача управления режущим инструментом с условиями предшествования и динамическими ограничениями преобразуется к строгой математической

постановке оптимизационной задачи в классе вышеупомянутых маршрут- ных процессов, в которой нашей целью является нахождение глобального экстремума и соответствующего оптимального решения. Кратко излага- ются элементы общей теории и конструируемый на ее основе оптимальный алгоритм, реализованный на многоядерной ПЭВМ. Используются понятия и обозначения [[4](#_bookmark41), часть II], относящиеся к математической постановке, а также содержательные построения [[4](#_bookmark41), часть I].

Рассматриваемая задача имеет своим прототипом известную труд- норешаемую задачу коммивояжера или TSP в англоязычной литературе; см. [[7](#_bookmark43)—[12](#_bookmark45)]. Однако существенные особенности качественного характера (прежде всего, наличие ограничений) мотивируют построение специ- ализированной теории; см. [[1](#_bookmark39); [3](#_bookmark40)—[6](#_bookmark42); [13](#_bookmark46); [14](#_bookmark47)]. Разработке упомянутых теоретических вопросов посвящены, в частности, монографии [[13](#_bookmark46)—[15](#_bookmark48)]. В настоящем изложении мы выделяем [[4](#_bookmark41)], где на примере актуальной инженерной задачи удается продемонстрировать ряд принципиальных положений теоретического характера и, в частности, представить воз- можности динамического программирования (ДП) как общего метода решения различных прикладных задач.

В качестве основной задачи в данной работе рассматривается проблема маршрутизации инструмента машин листовой резки с ЧПУ, известная как Cutting Path Problem или Tool Path Problem [100].Эта проблема возникает на этапе разработки управляющих программ для машины с ЧПУ, которые задают траекторию перемещения инструмента и ряд технологических команд, определяющих параметры резки листового материала для получения из него заготовок известных форм и размеров. Необходимые данные для моделирования маршрута инструмента машины с ЧПУ определяет информация о раскройных картах, которые разрабатываются на этапе проектирования раскроя и порождает задачу нерегулярного фигурного раскроя листового материала (проблему «нестинга») [101,102]. С точки зрения геометрической оптимизации эта проблема относится к классу задач раскроя-упаковки (Cutting & Packing) [103], для которых также, как и для маршрутных оптимизационных проблем, не известны алгоритмы решения полиномиальной сложности. В данной статье вопросы оптимизации раскроя не рассматриваются.

Если говорить в целом о проблеме оптимизации траектории инструмента для технологического оборудования листовой резки с ЧПУ, то в настоящее время не существует единой теоретической базы для решения этой проблемы. Практически отсутствуют работы, описывающие точные алгоритмы, применяемые для решения задач маршрутизации инструмента. Известны отдельные группы ученых, которые занимаются исследованием частными случаев этой проблемы. Кроме того, в программном обеспечении систем Computer-Aided-Manufacturing (CAM), предназначенных для проектирования раскроя и управляющих программ для машин листовой резки с ЧПУ, есть отдельные модули, которые позволяют решать некоторые оптимизационные задачи, например (минимизацию холостого хода инструмента), однако при этом не обеспечивают соблюдение технологических требований резки материала на машинах с ЧПУ и не позволяют получать маршруты резки, близкие к оптимальным с точки зрения интегрированного критерия стоимости резки с учетом рабочего хода инструмента, затрат на врезку и т.д. Вместе с тем, в сочетании с интерактивными методами проектирования они обеспечивают рациональные и технологически допустимые варианты траекторий инструмента машины с ЧПУ. Следует подчеркнуть, что алгоритмы, реализованные в коммерческом программном обеспечении, не описываются в научной литературе. В нашей стране первые работы по оптимизации проектирования маршрута листовой резки на машинах с ЧПУ были опубликованы Фроловским В.Д [104] и Верхотуровым М.А. [105]. Авторы использовали простые графовые и комбинаторные математические модели, сводящиеся к классической задаче коммивояжера без дополнительных ограничений. Однако эти работы не получили продолжения. В последние годы появилось несколько публикаций Панюкова А.В. и Макаровских Т.А. по этой тематике [106-108], предполагающие использование техники совмещенного реза при формировании траектории инструмента машины с ЧПУ. Отметим, что эти работы фактически можно отнести к классу работ только по маршрутизации в графах (хотя они анонсированы как работы по маршрутизации инструмента лазерных машин с ЧПУ), поскольку в этих работах не исследованы вопросы технологической допустимости реализации получаемых траекторий на машинах листовой резки с ЧПУ и отсутствует вычислительный эксперимент. Из зарубежных конкурентов следует особо выделить группу ученых из Бельгии [100,109,110], которые ведут аналогичные авторам заявки исследования. В этих работах делается попытка увязать особенности лазерной резки с алгоритмами маршрутизации. В [109] дан обзор алгоритмов маршрутизации, имеющих отношение к фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ. Авторы классифицируют существующую литературу по маршрутизации на шесть классов задач: задача непрерывной резки (CCP), задача резки с конечным набором точек (ECP), задача прерывистой резки (ICP), задача обхода многоугольников (TPP), задача коммивояжера (TSP) и обобщенная задача коммивояжера (GTSP). Задача маршрутизации в общем случае резки может рассматриваться как ICP. Тем не менее, литература по ICP очень скудна, и в большинстве научных статей ограничиваются решением задач других классов. В [111,112] на базе введенных понятий «сегмент резки» и «базовый сегмент резки» удалось выделить в классе ICP достаточно широкий подкласс задач, которые сводятся к классам CCP и GTSP. Этот подход позволил, в частности, решать задачи разных классов с применением различных техник резки, включая «совмещенный рез», «мульти-контурную резку» [4] и др. Ряд исследователей из др. стран также периодически публикуют свои результаты, однако они, как правило, касаются разработки отдельных алгоритмов только для одного из вышеприведенных в [109] классов задач рассматриваемой проблемы маршрутизации инструмента, при этом часто не учитывают важные технологические ограничения листовой резки на машинах с ЧПУ. Наибольшую сложность представляют т.н. «динамические ограничения», порождаемые тепловыми деформациями материала и вызывающие изменения формальных математических условий задачи в процессе построения траектории инструмента машины с ЧПУ.

Из работ, учитывающих тепловые деформации материала при моделировании маршрута резки отметим [113-117]. В [113] предложен подход на основе параллельного программирования ограничений для маршрутизации лазерной резки с явным учетом ограничений предшествования и неявным учетом тепловых ограничений. Авторы подчеркивают важность учета всех практических соображений маршрутизации уже на этапе раскроя. Тем не менее, не было опубликовано никаких последующих исследований, направленных на решение этой комплексной проблемы. В [114] были разработаны более точные и более быстрые методы тепловых оценок. Хотя подтверждение концепции является обнадеживающим, требуется более детальное изучение этой проблемы. В [115,116] показана возможность применения эвристических подходов модели GTSP для задачи моделирования маршрута инструмента машины термической резки с одновременным учетом температуры материала. Вместе с тем, следует отметить, что приведенные результаты вычислений не очень убедительны с точки зрения оптимизации времени и стоимости процесса резки. В [117] исследуется подход, основанный на технологическом приеме оставления «перемычек» в процессе термической резки с целью увеличения жесткости листового материала и уменьшения геометрических деформаций деталей.

Перечисленные статьи демонстрируют, что работы по оптимальной маршрутизации инструмента машин листовой резки активно развиваются, и эта тематика нуждается в более структурированном научном подходе. В рамках этой тематики можно выделить два актуальных направления: 1) разработка точных алгоритмов и алгоритмов с гарантированными оценками точности; 2) учет динамических ограничений термической резки. Ниже приводится строгая математическая формализация задачи маршрутизации перемещений с ограничениями и функциями стоимости, зависящими от списка заданий, решение которой, в частности, позволяет получать оптимальные решения для целого ряда задач маршрутизации инструмента машин листовой резки, включая задачи с некоторыми типами «динамических» ограничений.

# Литература.

1. *Коробкин В. В.*, *Сесекин А. Н.*, *Ташлыков О. Л.*, *Ченцов А. Г.* Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения эффективно- сти и безопасности эксплуатации атомных станций. — 2012.
2. *Ташлыков О. Л.*, *Сесекин А. Н.*, *Щеклеин С. Е.*, *Ченцов А. Г.* Раз- работка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. — 2009. —

№ 2. — с. 115—120.

1. *Chentsov A. G.* Dynamic programming in routing problems (nuclear power, Engineering) // AIP Conference Proceedings. — 2020. — дек. — т. 2315, № 1. — с. 040011. — ISSN 0094-243X. — DOI: [10.1063/5](https://doi.org/10.1063/5.0036656). [0036656](https://doi.org/10.1063/5.0036656).
2. *Петунин А. А.*, *Ченцов А. Г.*, *Ченцов П. А.* Оптимальная маршру- тизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. — Издательство Уральского университета, 2020. — ISBN 978-5-7996- 3016-4.
3. *Chentsov A. G.*, *Chentsov P. A.*, *Petunin A. A.*, *Sesekin A. N.* Model of megalopolises in the tool path optimisation for CNC plate cutting machines // International Journal of Production Research. — 2018. — т. 56, № 14. — с. 4819—4830. — ISSN 0020-7543. — DOI: [10.1080/](https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1421784) [00207543.2017.1421784](https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1421784).
4. *Петунин А. А.*, *Ченцов А. Г.*, *Ченцов П. А.* К вопросу о маршрути- зации движения инструмента в машинах листовой резки с число- вым программным управлением // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического универ- ситета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2013. — 2 (169). — ISSN 2304-9766.
5. The traveling salesman problem and its variations / под ред. G. Gutin,

A. P. Punnen. — Springer Science & Business Media., 2006. — ISBN 978-0-387-44459-8.

1. *Cook W. J.* In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. — Princeton University Press, 2011. — ISBN 978-0-691-15270-7.
2. *Гимади Э. Х.*, *Хачай М. Ю.* Экстремальные задачи на множествах перестановок. — Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. — 220 с.
3. *Меламед И. И.*, *Сергеев С. И.*, *Сигал И. Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 9. — с. 3—33.
4. *Беллман Р.* Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. — 1964. — т. 9. — с. 219—228.
5. *Хелд М.*, *Карп Р.* Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. — 1964. — т. 9. — с. 202—218.
6. *Петунин А. А.*, *Ченцов А. А.*, *Ченцов А. Г.*, *Ченцов П. А.* Элемен- ты динамического программирования в конструкциях локального улучшения эвристических решений задач маршрутизации с ограни- чениями // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 4. — с. 106— 125. — ISSN 0005-2310. — DOI: [10.1134/S0005117917040087](https://doi.org/10.1134/S0005117917040087).
7. *Ченцов А. Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаоти- ческая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. — 240 с. — ISBN 978-5-93972-654-2.
8. *Ченцов А. Г.*, *Ченцов А.*, *Сесекин А. Н.* Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат. — 2020.
9. *Куратовский К.*, *Мостовский А.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
10. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. — Мир Москва, 1964. — 430 с.
11. *Кормен Т.*, *Лейзерсон Ч.*, *Ривест Р.*, *Штайн К.* Алгоритмы. Построе- ние и анализ:[пер. с англ.] — Издательский дом Вильямс, 2009. — ISBN 5-8459-0857-4.
12. *Ченцов А. Г.*, *Ченцов П. А.* Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 11. — с. 96—117.
13. *Ченцов А. Г.* К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 1. — с. 59—82. — ISSN 1994-9197.
14. *Ченцов А. Г.* Задача последовательного обхода мегаполисов с усло- виями предшествования // Автоматика и телемеханика. — 2014. —

№ 4. — с. 170—190.

1. *Ченцов А. Г.* Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — 18 (277). — ISSN 2071-0216.
2. *Lawler E. L.* Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems. — Stichting Mathematisch Centrum, 1979.

100. Dewil R, Vansteenwegen P, Cattrysse D. Sheet Metal Laser Cutting Tool Path Generation: Dealing with Overlooked Problem Aspects. KEM 2015; 639:517–24. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/kem.639.517.101.

101. Dowsland, K.A. and Dowsland, W.B., 1995, Solution approaches to irregular nesting problems, European Journal of Operations Research, 84, 506-52.\

102. Stoyan, Y., Pankratov, A., Romanova, T.: Placement problems for irregular objects: Mathematical modeling, optimization and applications. In: Butenko, S., Pardalos, P.M., Shylo, V. (eds.) Optimization Methods and Applications, vol. 130, pp. 521–559. Springer, Cham (2017). https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0\_25CrossRefGoogle Scholar

103. Alvarez-Valdes, R., Carravilla, M. A., & Oliveira, J. F. (2018). Cutting and Packing. In R. Martí, P. Panos, & M. G. C. Resende (Eds.), Handbook of Heuristics (pp. 931–998). https://doi.org/10.1007/978-3-319-07153-4\_43-1

104. Ганелина Н. Д., Фроловский В. Д. Декомпозиционный метод оптимизации проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ//Научный Вестник НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2006. № 2 (23). C. 9-19.

105. Верхотуров М. А., Тарасенко П. Ю. Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки//Вестник УГАТУ (сер. «Управление, ВТ и И»). 2008. T. 10, № 2(27). С. 123-130.

106. Makarovskikh, T.A., Panyukov, A.V. Software for constructing a-chains with ordered enclosing for a plane connected 4-regular graph (2019) IFAC-PapersOnLine, 52 (13), pp. 2650-2655. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.11.607

107. Makarovskikh, T.A., Panyukov, A.V., Savitskiy, E.A. Mathematical models and routing algorithms for economical cutting tool paths (2018) International Journal of Production Research, 56 (3), pp. 1171-1188. DOI: 10.1080/00207543.2017.1401746

108. Makarovskikh, T., Panyukov, A., Savitsky, E. Software development for cutting tool routing problems (2019) Procedia Manufacturing, 29, pp. 567-574. DOI: 10.1016/j.promfg.2019.02.123

109. Dewil, R., Vansteenwegen, P., Cattrysse, D. (2016). A review of cutting path algorithms for laser cutters. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 87 (5), Art.No. 10.1007/s00170-016-8609-1, 1865-1884. Open Access 110. Dewil, R., Vansteenwegen, P., Cattrysse, D., Laguna, M., Vossen, T. (2015). An improvement heuristic framework for the laser cutting tool path problem. International Journal of Production Research, 53 (6), 1761-1776. doi: 10.1080/00207543.2014.959268.

111. Petunin, Aleksandr A. (2015). Modeling of tool path for the CNC sheet cutting machines// AIP conference proceedings. 41st International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE), Sozopol, BULGARIA, JUN 08-13, 2015, 1690., pp.060002-1 – 060002-7.

112. Petunin A. General Model of Tool Path Problem for the CNC Sheet Cutting Machines // IFAC-PapersOnLine. — 2019, т. 52, № 13. — с. 2662—2667. DOI:10.1016/j.ifacol. 2019.11.609.

113. Lagerkvist, M. Z., Nordkvist, M., & Rattfeldt, M. (2013). Laser cutting path planning using CP. Principles and Practice of Constraint Programming, 790–804. https://doi.org/10.1007/978-3-642-40627-0\_58

114. Mejia, D., Moreno, A., Arbelaiz, A., Posada, J., Ruiz-Salguero, O., & Chopitea, R. (2017). Accelerated Thermal Simulation for Three-Dimensional Interactive Optimization of Computer Numeric Control Sheet Metal Laser Cutting. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 140(3), 031006. https://doi.org/10.1115/1.4038207

115. Hajad, Makbul & Tangwarodomnukun, Viboon & jaturanonda, chorkaew & Dumkum, Chaiya. (2019). Laser cutting path optimization using simulated annealing with an adaptive large neighborhood search. International Journal of Advanced Manufacturing Technology. DOI:10.1007/s00170-019-03569-6

116. Petunin, A. A., Polyshuk, E. G., Chentsov, P. A., Ukolov, S. S., & Krotov, V. I. (2019). The termal deformation reducing in sheet metal at manufacturing parts by CNC cutting machines. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 613(1), [012041]. https://doi.org/10.1088/1757-899X/613/1/012041

117. Kandasamy, V.A., Udhayakumar, S. Effective location of micro joints and generation of tool path using heuristic and genetic approach for cutting sheet metal parts. Int J Mater Form 13, 317–329 (2020). https://doi.org/10.1007/s12289-019-01488-1

Khachay, M. and Neznakhina, K.: Complexity and approximability of the Euclidean generalized traveling salesman problem in grid clusters. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 2019. WoS Q3 IF=1.01, Scopus Q3 SJR (https://doi.org/10.1007/s10472-019-09626-w)

26. Khachai, M., Neznakhina E. Approximation Schemes for the Generalized Traveling Salesman Problem // Proc. Steklov Inst. Mathematics (IF=0.623, Q2 SJR). 2017. Vol. 299, Suppl. 1. P. 97-105. (https://doi.org/10.1134/S0081543817090127)

1